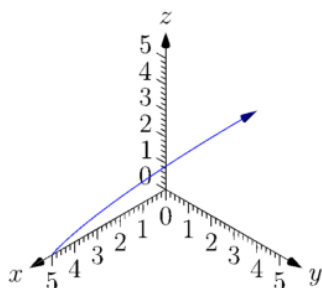


## Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

## Série de Exercícios 2

- 1) Descreva e represente graficamente as curvas descritas pelas funções vectoriais abaixo, dadas pela combinação linear dos versores do triedro direto  $\vec{i} = \vec{e}_x, \vec{j} = \vec{e}_y, \vec{k} = \vec{e}_z$ .
- $\vec{r}(t) = \text{sen}(t)\vec{i} + \text{cos}(t)\vec{j} + \vec{k}, 0 \leq t \leq \pi$
  - $\vec{r}(t) = \text{sen}(t)\vec{i} + 2\text{cos}(t)\vec{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$
  - $\vec{r}(t) = \text{sen}(t)\vec{i} + \text{cos}(t)\vec{k}, -\infty < t < \infty$
  - $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sqrt{4 - t^2}\vec{j}, -2 \leq t \leq 2$
- 2) Seja  $\vec{r}(t)$  o vetor posição de uma partícula dado por:  $\vec{r}(t) = a \cos(\omega t)\vec{i} + a \text{sen}(\omega t)\vec{j}$  associado a um movimento circular uniforme. Calcule o vetor velocidade  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$  e mostre que é ortogonal a  $\vec{r}(t)$  e calcule também o vetor aceleração  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$  e mostre que é colinear com  $\vec{r}(t)$  e sentido contrário ao deste.
- 3) Dada a função vectorial :  $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + e^t\vec{j} - 2 \cos(\pi t)\vec{k}$ . Calcule:
- $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$
  - $\frac{d\vec{r}}{dt}$
  - $\frac{d\vec{r}}{dt}(t = 1)$
  - $\int_0^1 \vec{r}(t) dt$
  - $\int \vec{r}(t) dt$



- 4) Mostre que o comprimento  $L$  da curva parametrizada por  $\vec{r}(t) = 5(1 - t^2)\vec{i} + 4t^{\frac{5}{2}}\vec{j} + 5t^2\vec{k}$ , definida para  $0 \leq t \leq 1$  é:  $L = \frac{32}{3}\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ . Essa curva é mostrada na figura anexa.

- 5) Calcular curvatura, raio de curvatura e módulo de torção da curva  $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$ .
- 6) Dado o vetor posição  $\vec{r}(t)$  em função do tempo.
- Mostre que a curvatura e torção são dados respetivamente por:

$$\kappa = \frac{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^3}$$

$$\tau = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\|^2}$$

- Usando as expressões anteriores, calcule a curvatura e torção para  $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$ .

- 7) a) Mostre que a curvatura do gráfico da função  $y = f(x)$  sobre o plano  $xy$  é dada pela expressão:

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

- b) Use a expressão anterior para calcular as curvaturas das curvas planas descritas por:

b1)  $y = ax + b$

b2)  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $-a < x < a$  onde  $a > 0$ .

b3)  $y = x^4$

b4)  $y = ax^2$

- 8) Calcule o valor mínimo e o valor máximo do raio de curvatura de uma elipse de semieixos  $a, b$  com  $0 < b \leq a$ . O que acontece quando  $a = b$ ? Quais são os semieixos da elipse cujo raio de curvatura varia entre 50m e 400m?